Pays : Côte d'Ivoire	**Année** : 2017	**Épreuve** : Mathématiques
Examen : Bac, Série C	**Durée** : 4 h	**Coefficient** : 5

EXERCICE 1

On désigne par Y une variable aléatoire vérifiant les conditions suivantes :

- Y prend les valeurs 1, -1 et 2 avec les probabilités respectives e^a, e^b et e^c où a, b et c sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r tels que : $a = b - r$ et $c = b + r$.
- L'espérance mathématique E(Y) de Y est égale à 1.

1. a) Justifie que le couple (b, r) est solution du système (S) $\begin{cases} e^b e^{-r} + e^b + e^b e^r = 1 \\ e^b e^{-r} - e^b + 2e^b e^r = 1 \end{cases}$.

b) Résous le système (S).

c) Déduis de ce qui précède que : $a = ln(\frac{1}{7})$ et $c = ln(\frac{4}{7})$.

2. Justifie que la variance V(Y) de Y est égale à $\frac{12}{7}$.

3. On marque sur une droite graduée (D) les points A, B et C d'abscisses respectives 1 ; -1 et 2.

On désigne par G le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, 2) et (C, 4).

On note (Γ) l'ensemble des points M de la droite (D) tels que : $MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2 = 187$ et on pose : $h(M) = \frac{1}{7}(MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2)$.

a) Calcule l'abscisse du point G.

b) Démontre que : $h(G) = V(Y)$.

c) Détermine l'ensemble (Γ).

EXERCICE 2

Dans le plan orienté, on considère un triangle OIJ tel que : OI = OJ et $Mes(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ}}) = \frac{\pi}{2}$.

A, B et C sont les milieux respectifs des segments [IJ], [JO] et [OI].

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et t la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$. On pose : F = rot et G = tor.

1. Fais une figure. (*On prendra : OI = 8 cm*).

2. a) Détermine F(C) et G(B).

b) Déduis de ce qui précède la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations F et G.

3. On désigne par F^{-1} la réciproque de la transformation F.

a) Détermine la nature de la transformation GoF^{-1}.

b) Détermine (GoF^{-1})(O), puis caractérise la transformation GoF^{-1}.

c) Détermine (GoF)(I) puis déduis-en la nature et les éléments caractéristiques de la transformation GOF.

4. On munit le plan du repère orthonormé (O, I, J) tel que défini précédemment.

Soit h l'homothétie de centre B et de rapport -2. On pose : S = $h o r$.

a) Écris l'affixe de chacun des points A , B et C.

b) Détermine l'écriture complexe de h et celle de r.

c) Soit g l'application complexe associée à S.

Démontre que : $\forall\, z \in \mathbb{C}, g(z) = -2iz - 2 + \frac{3}{2}i$.

d) Déduis de ce qui précède la nature et les éléments caractéristiques de S.

PROBLÈME

On considère la suite (t_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $t_n = n - \left(n + \frac{1}{2}\right) ln(n) + ln(n!)$.

Le but de ce problème est d'étudier la convergence de la suite (t_n) *et de démontrer que* :

$$\lim_{n \to +\infty} t_n = ln(\sqrt{2\pi})$$

<u>Partie I</u> : Étude de la convergence de la suite(t_n)

Soit n un entier naturel non nul et ψ la fonction définie sur $]-n\,;+\infty[$ par : $\psi(t) = ln\left(1 + \frac{t}{n}\right) - \frac{t}{n}$.

On suppose que ψ est dérivable sur $]-n\,;+\infty[$ et on note ψ' sa fonction dérivée.

1. a) Justifie que : $\forall\, t \in]-n\,;+\infty[,\ \psi'(t) = \frac{-t}{n^2(1+\frac{t}{n})}$.

b) Calcule $\psi(0)$.

c) Dresse le tableau de variation de la fonction ψ (*On ne calculera pas les limites*).

d) Déduis de ce qui précède que : $\forall\, t \in]-n\,;+\infty[, ln(1 + \frac{t}{n}) \leq \frac{t}{n}$.

2. a) En utilisant la question **1.** d) et en effectuant un changement de variable, démontre que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, lnx \leq x - 1.$$

b) Démontre que : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} (\frac{x}{k} - 1)dx = 0.$

c) Déduis des questions **2.** a) et **2.** b) que : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} ln(\frac{x}{k})dx \leq 0.$

d) Justifie alors que : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} ln(x)dx \leq ln(k).$

e)En utilisant la relation de Chasles, démontre que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} ln(x)dx \leq ln(n!).$$

3. a) En utilisant une intégration par parties, démontre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n - \left(n + \frac{1}{2}\right) ln\left(n + \frac{1}{2}\right) + ln(n!) \geq ln(\sqrt{2}).$$

b) Démontre que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, t_n \geq ln(\sqrt{2})$.

4. On définit la fonction f sur l'intervalle$]0\,;1[$ par : $f(x) = \frac{1}{2x} ln(\frac{1+x}{1-x})$.

On admet que : $\forall\, x \in]0\,;1[\,, f(x) \geq 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, t_{n+1} - t_n = 1 - f(\frac{1}{2n+1})$.

a) Détermine le sens de variation de la suite (t_n).

b) Déduis des questions précédentes la convergence de la suite (t_n).

<u>Partie II</u> : Calcul de la limite de la suite (t_n)

On définit la suite (w_n) par :

$$w_0 = \frac{\pi}{2} \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N}^*, w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n\, t\, dt.$$

1. a) Calcule w_1.

b) Démontre que la suite (w_n) est décroissante et positive.
On admettra que la suite (w_n) est à termes strictement positifs.

c) A l'aide d'une intégration par parties, démontre que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\, w_n$.

On remarquera que : $sin^{n+2}(t) = sin(t) \times sin^{n+1}(t)$.

d) En utilisant les questions **1.** b) et **1.** c) de la partie II, justifie que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{w_{n+1}}{w_n} \leq 1.$$

e) Déduis de ce qui précède $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{w_{n+1}}{w_n}$.

2. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}, y_n = (n+1)w_{n+1} \times w_n$.

a) Démontre que la suite (y_n) est constante.

b) Déduis de ce qui précède que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ y_n = \frac{\pi}{2}$.

c) Détermine $\lim\limits_{n \to +\infty} n w_n^2$.
$(On\ remarquera\ que : n w_n^2 = \frac{n}{n+1} \times y_n \times \frac{w_n}{w_{n+1}})$.

d) Déduis de ce qui précède que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} w_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

3. On admet dans toute la suite du problème que, si une suite (a_n) converge vers l, alors la suite (a_{2n}) converge aussi vers l.

a) Déduis de la question **2.** c) de la partie II la limite de la suite $(n w_{2n}^2)$.

(*On remarquera que* : $n w_{2n}^2 = \frac{1}{2}(2n w_{2n}^2)$).

b) En utilisant la question **1.** c) de la partie II, démontre par récurrence que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, w_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}.$$

c) Démontre que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, e^{t_n} = n!\,(\frac{e}{n})^n \times \frac{1}{\sqrt{n}}$.

d) En admettant que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, e^{t_{2n} - 2t_n} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{n w_{2n}^2}$, détermine la limite de la suite (t_n).