Pays : Burkina Faso	**Année** : 2017	**Épreuve** : Maths
Examen : BAC, Session normale, 2ème Tour, Série D	**Durée** : 4 h	**Coefficient** : 5

EXERCICE 1 (04 *points*)

On considère la suite numérique (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{3U_n}{1+2U_n} \end{cases}.$$

On admet que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n < 1$.

2. Démontrer que (U_n) est croissante et convergente.

3. On pose $V_n = \frac{U_n}{1-U_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer V_n en fonction de n. En déduire que : $U_n = \frac{3^n}{1+3^n}$.

c) Calculer la limite de (U_n).

EXERCICE 2 (04 *points*)

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique 6 cm, on considère la courbe (C) de représentation paramétrique : $\begin{cases} x(t) = cost \\ y(t) = \frac{sin^2(t)}{2+sint} \end{cases}$, $t \in [-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{3\pi}{2}]$.

1. On note M(t) le point de coordonnées (x(t) ; y(t)).

a) Comparer les points M(t) et M(π – t).

b) En déduire que l'on peut restreindre le domaine d'étude de (C) à $[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}]$.

2. *a*) Montrer que : $y'(t) = \frac{sintcost(4+sint)}{(2+sint)^2}$.

b) Étudier le sens de variation de x et y sur $[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}]$.

c) Dresser le tableau de variation conjoint de x et y sur $[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}]$.

3. Tracer (C) après avoir placé les points remarquables avec les tangentes associées.

PROBLÈME (12 *points*)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = (x+1)e^{1-x} \;\; si\; x \leq 1 \\ f(x) = \frac{2}{x} - lnx \;\; si\; x > 1 \end{cases}.$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A (09,5 *points*)

1. *a*) Calculer les limites de f en -∞ et en +∞.

b) Calculer les limites de $\frac{f(x)}{x}$ en -∞ et en +∞. Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ?

c) Étudier la continuité de f en 1.

2. *a*) On pose : $X = 1 - x$.

Démontrer que : pour tout $x < 1$, $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -2\left(\frac{e^X-1}{X}\right) + e^X$.

b) On pose : $X = x - 1$.

Démontrer que : pour tout $x > 1$, $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{-2}{X+1} - \frac{\ln(X+1)}{X}$.

c) Étudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3. *a*) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \neq 1$, puis étudier son signe.

b) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

4. *a*) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur]1 ; +∞[.

Vérifier que : $2{,}3 < \alpha < 2{,}4$.

b) Résoudre dans]-∞ ; 1] l'équation $f(x) = 0$.

5. Construire la courbe (C) et ses demi-tangentes.

Partie B (02,5 *points*)

1. Calculer l'intégrale $\int_1^\alpha lnx dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

2. Soit $\mathcal{a}$ l'aire en cm^2 du domaine plan délimité par les droites d'équations $x = 1$; $x = \alpha$, l'axe des abscisses et la courbe (C).

Démontrer que :

a) $\mathcal{a} = (8 - 4\alpha)\ln\alpha + 4\alpha - 4$

b) $\mathcal{a} = 4\alpha + \frac{16}{\alpha} - 12$.

3. On considère un point mobile M dont les coordonnées sont données en fonction du paramètre t par :

$$\begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = -t + 2e^{-t} \end{cases},\ t \geq 0.$$

Montrer que la trajectoire de M est une partie de (C) que l'on précisera.