Pays : Côte d'Ivoire	**Année** : 2017	**Épreuve** : Mathématiques
Examen : Bac, Série E	**Durée** : 4 h	**Coefficient** : 5

EXERCICE 1

Afin d'éviter des licenciements dans une entreprise, la direction et le personnel se sont mis d'accord, pour réduire la durée hebdomadaire du travail et de la faire passer de cinq à quatre jours.
L'un des trois jours de congés sera dimanche, les deux autres étant répartis au hasard dans la semaine.
Dans un sac, on dépose six boules portant chacune le nom d'un des jours de la semaine, du lundi au samedi. Chaque employé choisit ses deux jours de congé autre que le dimanche en tirant au hasard et simultanément deux de ces boules, supposées indiscernables au toucher. Il remet ensuite les deux boules tirées dans le sac.

1. a) Soit A l'évènement « l'un des jours de congé est le lundi » et
B l'évènement « l'un des jours de congé est le samedi ».

Démontrer que : $P(A) = P(B) = \frac{1}{3}$.

b) On définit les évènements C et D suivants :

C " parmi les jours de congés figurent le lundi, ou le samedi, ou les deux jours ".
D " les jours de congés sont trois jours consécutifs".

Calculer P(C) et P (D).

c) Yao aimerait bien avoir les mêmes jours de congé que Mariam. Quelle est la probabilité que son souhait se réalise ?

2. L'entreprise compte douze employés. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'employés ayant tiré le samedi comme jour de congé.

a) Quelle est la loi de probabilité de X ?

b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

c) Calculer la probabilité pour que 5 employés tirent le samedi comme jour de congé.

d) Calculer la probabilité pour qu'au moins deux (2) employés tirent le samedi comme jour de congé.

EXERCICE 2

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC tel que : $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{3}$.

On appelle ($\mathcal{C}$) le cercle circonscrit au triangle ABC et O son centre. I est le milieu du segment [AB] et J le milieu du segment [OI]. Les droites (OA) et (OC) recoupent ($\mathcal{C}$) respectivement en D et E.

1. Placer ces points sur une figure.

2. On note G l'isobarycentre des points A, B, C, D et E.

a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{OB}$.

b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OJ}$.

c) En déduire que les droites (OB) et (DJ) se coupent en G, puis placer G.

3. A tout point M du plan, on fait correspondre par une transformation f, le point M’

tel que : $4\,\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}$.

a) Démontrer que f est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

b) Déterminer les images par f des points B et D.

4. Soit R la rotation de centre O et d’angle $\frac{2\pi}{3}$ et S la transformation telle que : S = R$\circ f$.

a) Caractériser la transformation S.

b) Construire le point H tel que : H = S(G).

c) Soit le point , invariant par S.
Démontrer que les points Ω, O, G et H sont cocycliques ainsi que les points Ω, O, B et D.

PROBLÈME

Partie A

On considère l’équation différentielle (E) : $y'' - 2y = 4x^2e^{x^2}$.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l’équation différentielle (E’) : $y'' - 2y = 0$.

2. a) Déterminer les nombres réels a et b pour que la fonction h_1 définie par $h_1(x) = (ax + b)e^{x^2}$ soit solution de l’équation différentielle (E).

b) Soit h_2 une fonction. Démontrer que h_2 est solution de (E) si et seulement si $h_2 - h_1$ est solution de (E’).

3. Déduire de ce qui précède la résolution sur $\mathbb{R}$ de l’équation (E).

Partie B

Soit f la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{x|x|}$.

On désigne par ($\mathcal{C}$) la courbe représentative de f dans le plan muni d’un repère orthonormé (O, I, J).
Unité graphique : 2 cm.

1. a) Calculer la limite de f en $-\infty$.
b) Interpréter graphiquement ce résultat.

2. a) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) En déduire une interprétation graphique.

3. a) Calculer : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x)-1}{x}$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{f(x)-1}{x}$.

b) Donner une interprétation graphique de ces résultats.

c) Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

4. Déterminer une équation de la tangente (T) à ($\mathcal{C}$) au point d’abscisse $\frac{-\sqrt{2}}{2}$.

5. Soit g la fonction définie sur $]-\infty\,;-\frac{1}{2}]$ par : $g(x) = e^{-x^2} - (x\sqrt{2} + 2)e^{-\frac{1}{2}}$.

a) Justifier que : $\forall\, x \in]-\infty;-\frac{1}{2}],\ g''(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$.

b) Étudier les variations de g'.

c) Démontrer que : $\forall\, x \in]-\infty\,;-\frac{\sqrt{2}}{2}] \cup]-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;-\frac{1}{2}[,\ g'(x) < 0$.

d) En déduire le sens de variation de g sur $]-\infty\,;-\frac{1}{2}]$.

e) Démontrer que : $\forall\, x \in]-\infty\,;-\frac{\sqrt{2}}{2}],\ g(x) < 0$ et $\forall\, x \in]-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{1}{2}[,\ g(x) > 0$.
En déduire les positions de $(\mathcal{C})$ relativement à (T).

6. Tracer (T) puis $(\mathcal{C})$.