

Pays : Cameroun	Année : 2017	Épreuve : Mathématiques
Examen : BAC, Séries C - E	Durée : 4 h	Coefficient : 5 - 4

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1 : SÉRIE C UNIQUEMENT (05 points)

- Vérifier que le couple $(5 ; -7)$ est une solution de l'équation (E) : $13x + 7y = 16$.
 - Déterminer les couples d'entiers relatifs $(x ; y)$ vérifiant l'équation (E).
- Démontrer que, pour tout entier naturel n , $4^{2n} \equiv 1[5]$.
 - Déterminer le reste de la division euclidienne de 2014^{2015} par 5.
- p désigne un entier naturel supérieur à 1. Une urne contient $2p$ boules numérotées de 1 à $2p$, toutes indiscernables au toucher. Un joueur tire successivement, sans remise 2 boules de cette urne.
 - Quel est le nombre de résultats possibles ?

Si les boules tirées portent des numéros pairs, il gagne 800 F CFA. Si les boules tirées sont de parités différentes, il gagne 400 F CFA et il perd 800 F CFA si elles portent des numéros impairs. On désigne par X le gain algébrique du joueur à l'issue de chaque épreuve.

 - Déterminer la loi de probabilité de X en fonction de p .
 - Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de p .
 - Calculer p pour que l'espérance de gain du joueur soit de 240 F CFA.

EXERCICE 2 : SÉRIE E UNIQUEMENT (05 points)

E est un espace vectoriel sur \mathbb{R} dont une base est $B = (\vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.

Soit f l'endomorphisme de E qui à tout vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ associe le vecteur $f(\vec{u}) = (-x - y + 2z)\vec{i} + (2x - y + z)\vec{j} + (x - 2y + 3z)\vec{k}$.

- Déterminer la matrice de f dans la base B .
- Déterminer le noyau $\text{Ker } f$ de f (On donnera une base de $\text{Ker } f$).
 - En déduire la dimension de $\text{Im } f$, image de f .
 - f est-elle bijective ? Justifier la réponse.
- On considère les vecteurs $\vec{e}_1 = 2\vec{j} - \vec{k}$; $\vec{e}_2 = 3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{e}_3 = \vec{i} - \vec{k}$.
 - Démontrer que la famille $B' = (\vec{e}_1 ; \vec{e}_2 ; \vec{e}_3)$ est une base de l'espace vectoriel E .
 - Déterminer la matrice de f dans la base B' .

EXERCICE 3 (05 points)

Soit ABCD un carré de sens direct et de centre I.

Partie A

Soient r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, t la translation de vecteur \overrightarrow{AC} et S la symétrie centrale de centre C, c'est-à-dire $r = R(A, \frac{\pi}{2})$, $t = t_{\overrightarrow{AC}}$ et $S = S_C$.

- Déterminer la droite (Δ) telle que $r = S_{\Delta} \circ S_{(AD)}$.
 - Donner la nature et les éléments caractéristiques de $t \circ r$.
- Déterminer $(S \circ t \circ r)(A)$ et $(S \circ t \circ r)(D)$.
 - Donner la nature et les éléments caractéristiques de $S \circ t \circ r$.

Partie B

Soient M un point de la droite (DC), N le point d'intersection de la droite (BC) avec la perpendiculaire à la droite (AM) passant par A, J le milieu du segment [MN]. r' est la rotation de centre A telle que $B = r'(D)$; S' est la similitude directe de centre A telle que $I = S'(D)$.

- Montrer que $N = r'(M)$. En déduire la nature du triangle AMN.
- Déterminer l'image de C par S' .
 - Démontrer que $J = S'(M)$.
 - Déduire le lieu géométrique des points J, lorsque M décrit la droite (DC).

PROBLÈME (10 points)

Partie A

On se place dans l'espace (\mathcal{E}) muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. On considère les points $A(1; 6; 4)$, $B(2; 5; 3)$, $C(8; 1; 7)$. On pose $\vec{N} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

- Déterminer les coordonnées de \vec{N} . En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
 - Déterminer l'aire du triangle ABC.
- Soit (Δ) la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}(2; -1; 3)$.
 - Démontrer que la droite (Δ) est orthogonale au plan (ABC).
 - En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
 - Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) .
 - Déterminer les coordonnées de K, point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC).
- On note H le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).
 - On pose $\overrightarrow{DH} = \alpha \vec{N}$. Calculer α .
 - En déduire la distance DH et le volume du tétraèdre ABCD.

4. Soit (P_1) le plan d'équation $x + y + z - 6 = 0$ et (P_2) le plan d'équation $x + 4y - 7 = 0$.

a) Démontrer que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants.

b) Vérifier que la droite (d) , intersection des plans (P_1) et (P_2) , a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -4t - 1 \\ y = t + 2, t \in \mathbb{R}. \\ z = 3t + 5 \end{cases}$$

c) La droite (d) et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

5. Démontrer que la courbe (S) d'équation $x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 4 = 0$ est une sphère (\mathcal{E}) dont on précisera les éléments caractéristiques.

Partie B

Soit (P) le plan de l'espace (\mathcal{E}) d'équation $z = 0$, rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 2\ln x - \frac{3}{x} + 3$. (C_f) est la courbe représentative de f dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

1. a) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

b) Étudier les variations de f et en déduire son signe.

c) Tracer la courbe (C_f) de f dans le repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ du plan.

2. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Calculer u_1 , u_2 et u_3 (On donnera l'arrondi d'ordre 2).

b) Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

c) Démontrer que pour tout entier naturel n : $2 \leq u_n \leq 6,5$.

d) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. Soient les équations différentielles $(E) : y'' + y' = 0$ et $(E') : y'' + y' = \frac{(2x-3)(x+2)}{x^3}$.

a) Montrer que f est solution sur $]0 ; +\infty[$ de (E') .

b) Résoudre (E) sur $]0 ; +\infty[$.

c) Montrer qu'une fonction g est solution de (E') si et seulement si $g - f$ est solution de (E) .

d) Résoudre alors (E') sur $]0 ; +\infty[$.