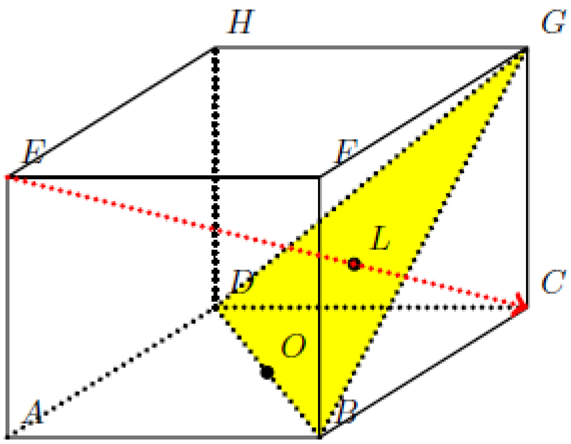
Pays : Sénégal	**Année** : 2017	**Épreuve** : Mathématiques
Examen : BAC, Séries S1-S3	**Durée** : 4 h	**Coefficient** : 8

EXERCICE 1 (05 *points*)

ABCEDFGH est un cube d'arête 1. On rapporte l'espace au repère orthonormé direct $(A\ ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1. *a*) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BG}$.

b) En déduire une équation cartésienne du plan (BGD).

c) Vérifier que la droite (EC) est orthogonale au plan (BGD).

2. Donner une équation de la sphère (S) de centre C et tangente au plan (BGD).

3. À tout α appartenant à l'intervalle [0 ; 1] on associe le point M de coordonnées (α, α, 1 – α).

a) Montrer que M est un point du segment [EC].

b) Montrer que la distance du point M à la droite (BD) est égale à $\sqrt{3\alpha^2 - 4\alpha + \frac{3}{2}}$.

c) Déterminer α pour que la distance de M à la droite (BD) soit minimale. Soit L le point associé à cette valeur de α.

d) Vérifier que L est le centre de gravité du triangle BGD.

4. Soit *h* l'homothétie de centre E et de rapport $k \in [0\ ; 1]$.

a) Donner l'expression analytique de *h*.

b) Vérifier que : *h*(C) = M.

c) Déterminer une équation de (S') image de (S) par *h*.

EXERCICE 2 (04 *points*)

Soit *a* un entier naturel non nul et$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_n = pgcd(n, a)$.

1. *a*) Pour *a* = 15, calculer les 3 premiers termes de la suite (u_n).

b) Pour *a* = 4, soient *m* et *n* des entiers naturels tels que : $u_m = u_n = 2$.
Montrer que : $u_{m+n} = 4$.

2. *a*) Soit *b* un entier naturel.
Démontrer que pour tout entier relatif *q*, on a : pgcd(*a*, *b*) = pgcd(*a*, *b* – *qa*).

b) Calculer u_0 et u_a.

c) Démontrer que : $u_{n+a} = u_n$.
Quelle propriété de la suite (u_n) a-t-on mise en évidence ?

3. Pour *a* = 15, calculer u_n avec $n = 15^{21} + 2$.

PROBLÈME (11 *points*)

Le plan orienté $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct (O ; $\vec{\imath},\vec{\jmath}$) (unité graphique 4 cm).
n étant un entier naturel non nul, on s'intéresse aux solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation d'inconnue x, $(E_n) : x + e^x - n = 0$.
Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x + e^x - n$.
On note C_{f_n} la courbe représentative de f_n dans le repère.

<u>Partie A</u>

1. *a*) Vérifier que pour tout réel x strictement positif, $\ln(x) - x < 0$.

b) Montrer que l'équation (E_n) possède une solution unique u_n et que u_n appartient à l'intervalle $]\ln\frac{n}{2} ; \ln(n)]$.

c) En déduire la limite en $+\infty$ de : u_n ; $\frac{u_n}{n}$ et $\frac{u_n}{\ln(n)}$.

2. Dans cette question et celles qui suivent, on pourra au besoin se servir de l'équivalence suivante : $\forall\, x \in \mathbb{R}, x + e^x - n = 0 \iff e^x = n - x$.

a) Calculer la limite en $+\infty$ de $\frac{e^{u_{n+1}}}{e^{u_n}}$.
Montrer alors que $(u_{n+1} - u_n)$ a pour limite 0.

b) À l'aide des variations de l'application f_n, étudier celles de la suite (u_n).

c) On note A_n l'aire du domaine plan délimité par les droites d'équations $x = u_{n+1}$, $x = u_n$, l'axe des abscisses et la courbe C_{f_n}.
Montrer que : $A_n = \frac{1}{2}(u_{n+1}^2 - u_n^2) - (n+1)(u_{n+1} - u_n) + 1$.

d) Vérifier que pour tout x appartenant à l'intervalle fermé d'extrémités u_{n+1} et u_n, on a : $0 \le f_n(x) \le 1$. En déduire la limite de A_n.

3. *a*) En utilisant la définition de la dérivée d'une fonction en un point, vérifier qu'il existe une fonction ε définie dans un intervalle ouvert contenant 0 telle que pour tout h dans cet intervalle, on ait : $\ln(1 + h) = h + h\varepsilon(h)$
et $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$

b) On pose : $\alpha_n = \frac{u_n}{\ln(n)} - 1$, c'est-à-dire : $u_n = \ln(n) + \alpha_n \ln(n)$.
Quelle est la limite de α_n ?

c) Déterminer une suite (y_n) telle que : $u_n = \ln(n) + \ln(1 + y_n)$.
Déduire alors de la question **3.** *a*) qu'il existe une suite β_n ayant pour limite 0 telle que : $u_n = \ln(n) - \frac{\ln(n)}{n} + \beta_n \frac{\ln(n)}{n}$.

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse à u_2.
D'après la première partie, u_2 appartient à l'intervalle [0 ; ln2].
On note g l'application de [0 ; 1] dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall\, x \in [0\,;\,1]$, $g(x) = \ln(2 - x)$ et on pose $b = \frac{2}{3}ln2$ et $a = g(b)$.

1. *a*) Montrer que u_2 est le seul point fixe de g et que u_2 appartient à l'intervalle $I = [a\,;\,b]$.
b) Prouver que g est dérivable sur I et $\forall\, x \in I, |g'(x)| \leq |g'(b)|$.
Énoncer clairement le théorème qui permet d'en déduire que :
$\forall\, x, y \in I, |g(x) - g(y)| \leq |g'(b)||x - y|$.
c) Vérifier que : $g(I) \subset I$.

2. On pose, $a_0 = b$ et pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = g(a_n)$.
a) Démontrer que la suite (a_n) est bien définie (c'est-à-dire démontrer que pour tout entier naturel n, a_n appartient à l'ensemble de définition de g) et que pour tout entier naturel n, a_n appartient à I.
b) Démontrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, |a_n - u_2| \leq |g'(b)|^n (b - a)$.
En déduire que la suite (a_n) est convergente et calculer sa limite.
c) Quelle valeur suffit-il de donner à n pour que a_n soit une valeur approchée de u_2 à 10^{-3} ?

3. Représenter sur un même graphique, les restrictions de g et f_2 à l'intervalle [0 ; 1], le domaine A_2, la droite d'équation $y = x$, les points de coordonnées respectives $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(u_2, 0)$, $(u_3, 0)$.