Prof :Khammour.Khalil **Année Scolaire :**2013/2014	**Série d'exercices :** **Logarithme Népérien**	4ème Eco-Gestion **Tunis ,Tél :27509639**

Exercice n°1 :

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x\to+\infty}(\ln x + x^2)$	$\lim_{x\to+\infty}(1-x)\ln x$	$\lim_{x\to 0^+}(x - 2 + \ln x)$
$\lim_{x\to+\infty}(1 + (\ln x)^2)$	$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} - \ln x\right)$	$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{2\ln x + 1}{x}\right)$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)$	$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$	$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2 - x\ln x$

Exercice n°2 :

Soit g définie sur [0,+∞[par : $g(x) = 1 - \frac{1}{x} + 2\ln x$

1) a) Etudier les variations de g.
   b) En déduire le signe de g sur [0,+∞[
2) Soit f définie sur [0,+∞[par $f(x) = 1 - x + (2x - 1)\ln x$.
   a) Etudier les variations de f.
   b) Etudier la position relative de C_f par rapport à $\Delta : y = x$.

Exercice n°3 :

1) Soit g la fonction définie sur l'intervalle]-1,+∞[par :$g(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$.
   a) Déterminer $\lim_{x\to -1^+} g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.
   b) Dresser le tableau de variation de g .
   c) Calculer g (0).En déduire le signe de g (x) sur l'intervalle]-1,+∞[.
2) On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle]-1,+∞[par :$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+1} - x$ et soit (C_f) sa courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   a) Montrer que pour tout $x \in]-1,+\infty[$ $f'(x) = -\frac{g(x)}{(x+1)^2}$
   b) Dresser le tableau de variation de f.
3) a) Montrer que la droite Δ d'équation y=-x est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de+∞
   b) Etudier la position relative de (C_f) par rapport à Δ.
   c) Tracer la courbe (C_f).
4) Soit h la fonction définie sur l'intervalle]-1,+∞[par :$h(x) = [\ln(x+1)]^2$.
   a) Calculer h '(x).
   b) En déduire une primitive de f sur l'intervalle]-1,+∞[.

Exercice n°4 :

1) On considère la fonction f définie sur l'intervalle] $0,+\infty$[par : $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.
   a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
   b) Calculer la dérivée f ' de la fonction f.
   c) En déduire les variations de la fonction f.
2) On considère la fonction g définie sur l'intervalle] $0,+\infty$[par : $g(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$.
   a) Déterminer les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$.

   (**Indication** $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$)
   b) Calculer la dérivée g ' de la fonction g.
   c) En déduire les variations de la fonction g.
3) a) Démontrer que les courbes C_f et C_g possèdent deux points communs dont on précisera les coordonnées.
   b) Étudier la position relative des courbes C_f et C_g.
   c)Tracer C_f et C_g.

Exercice n°5 :

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle] $0,+\infty$[par : $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1 - \ln x$.

1) a) Calculer g'(x) et donner le sens de variation de g sur] $0,+\infty$[.
   b) Dresser le tableau de variation de g .

2) En déduire le signe de g(x) sur] $0,+\infty$[.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle] $0,+\infty$[par : $f(x) = 3 - x - 2\frac{\ln x}{x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan ayant pour unités graphiques: 4 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées .

1) a) Etudier la limite de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat.
   b) Etudier la limite de f en $+\infty$.
   c) Calculer f '(x) pour tout $x\in]0,+\infty[$ et montrer que $f'(x) = -2\frac{g(x)}{x^2}$.
   d) Dresser le tableau de variation de f sur $]0,+\infty[$.
2) a) Montrer que la droite (D) d'équation y = -x+3 est asymptote à la courbe (C) .

b) Calculer les coordonnées du point d'intersection de (C) et de (D) .

c) Etudier la position relative de (C) par rapport à (D) .

3) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

4) Tracer avec soin (T), (D) et la courbe (C) dans le plan muni du repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

<u>Exercice n°6:</u>

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $f(x) = (1+\frac{1}{x})\ln x$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Partie A

Soit g la fonction définie sur par $]0,+\infty[$: $g(x) = x + 1 - \ln x$.

1) a) Calculer g'(x).

b) Dresser le tableau de variation de g.

2) Déterminer le signe de g(x) sur $]0,+\infty[$.

Partie B

1) a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b) Déterminer la limite de la fonction f en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a) Calculer f '(x) pour tout $x\in]0,+\infty[$ et montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de g.

c) Calculer f (1). En déduire le signe de f (x) sur $]0,+\infty[$.

3) a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

b) Tracer (C) et (T) .

4) Soit F la primitive de f sur $]0,+\infty[$ qui prend la valeur -1 en 1 .

a) Montrer que $F(x) = x\ln x - x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$.

b) Dresser le tableau de variation de F sur $]0,+\infty[$.

<u>Exercice n°7 :</u>

La courbe ci-dessous est la représentation graphique dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'une fonction f définie et dérivable sur $]0,+\infty[$.

La droite (T) est sa tangente au point d'abscisse 1.

Par lecture graphique

1) Donner les valeurs de $f(\frac{1}{e})$ et f '(1).

2) Etudier le signe de f sur $]0,+\infty[$.

3) On admet que la fonction f est définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = (ax+b)\ln x$.

a) Exprimer f '(x) en fonction de a et b.

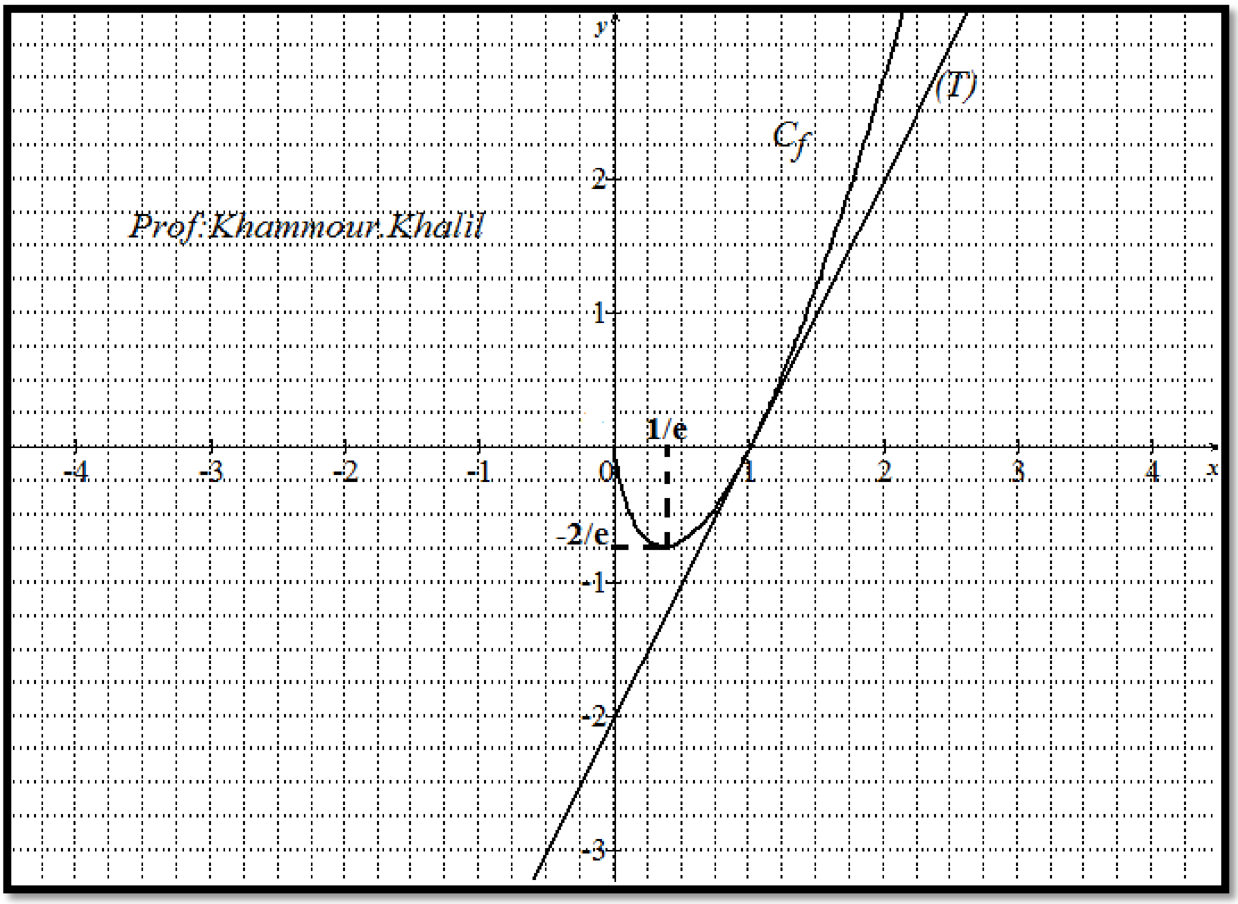
b) Déterminer alors les valeurs de a et b .

4) On considère les fonctions F et G définie sur] 0,+∞[par : $F(x) = x^2(\ln x - \frac{1}{2})$ et $G(x) = x^2(1 - \ln x)$

a) Calculer F '(x) et G '(x).

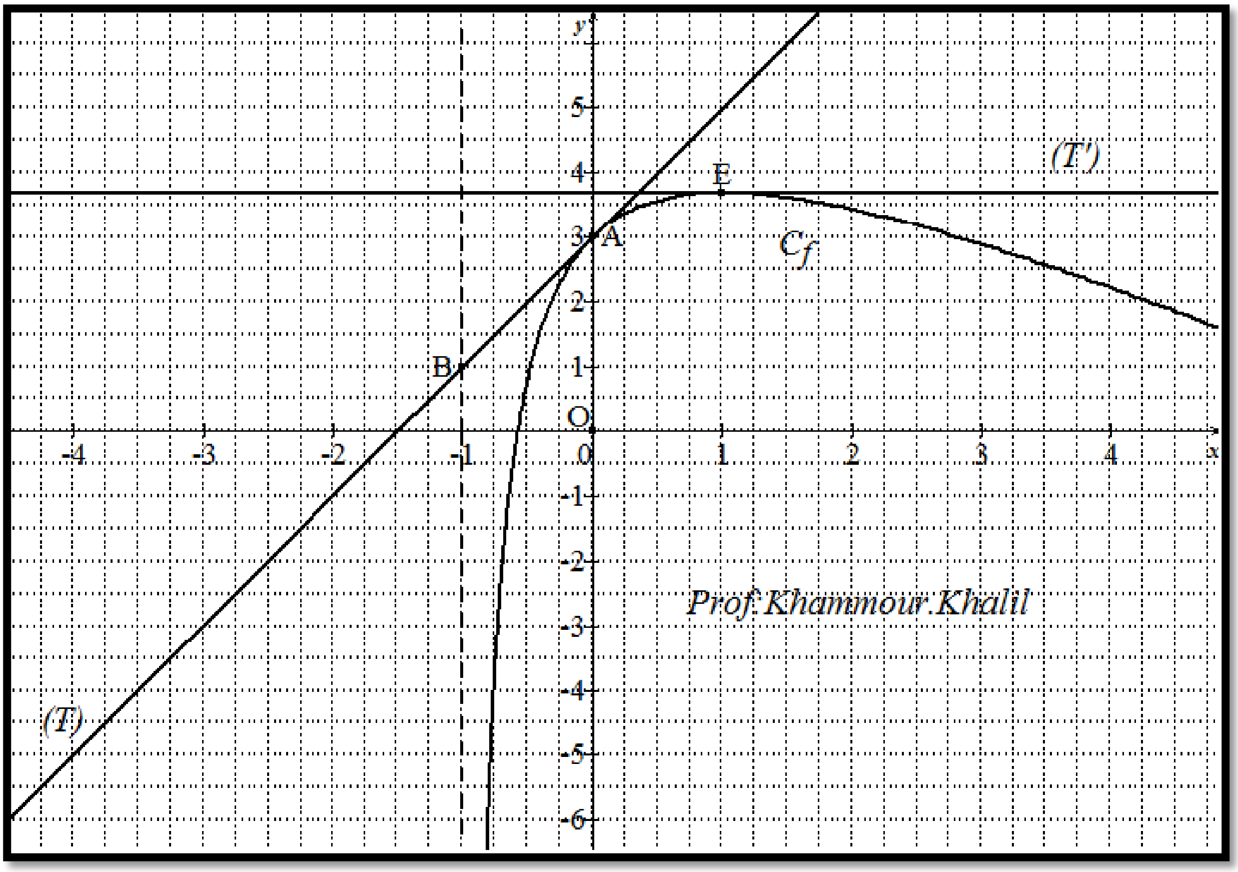
b) En déduire la primitive de f sur] 0,+∞[.

La courbe de la fonction f



Exercice n°8 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Sur la figure ci-dessous, la courbe (C_f) représente une fonction f définie sur l'intervalle] -1,+∞[. On a placé les points A(0 ; 3) , B(-1 ; 1) et E(1 ; 3+ln2). La droite (T) est tangente en A à la courbe (C_f) et la droite (T') est tangente en E ,à la courbe (C_f).



Par lecture graphique :

1) a) Déterminer l'équation de la tangente (T).
   b) Déterminer f (0) , f '(0) , f (1) , f '(1).
   c) Le nombre de solutions de l'équation f (x)=1.
2) Dresser le tableau de variation de f.
3) On admet que la fonction f est définie par : $f(x) = ax + 5 + \frac{b}{x+1} + \ln(x+1)$.
   a) Vérifier que $f(x) = -x + 5 - \frac{2}{x+1} + \ln(x+1)$.
   b) Soit la fonction g définie sur] -1,+∞[par : $g(x) = -x + (x+1)\ln(x+1)$.Calculer g '(x) pour tout x de] -1,+∞[.
   c) En déduire une primitive de f sur] -1,+∞[.

Exercice n°9 :

On considère la fonction f définie sur] -1,+∞[par : $f(x) = 2\ln(x+1) + 1$.

1) a) Calculer $\lim_{x\to -1^+} f(x)$.Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
   b) Calculer f '(x) pour tout x appartenant à] -1,+∞[.
2) a) Dresser le tableau de variation de f sur] -1,+∞[.

b) Tracer la courbe (C) de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

3) On considère la droite (D) d'équation $y = 0{,}8x$ .Construire (D).

Application économique :

Une entreprise fabrique des pièces pour avions. On note *x* le nombre de pièces fabriquées par mois avec $0 \leq x \leq 15$. Chaque mois, les coûts de production, exprimés en milliers d'euros, sont donnés par: $f(x) = 2\ln(x+1) + 1$.

Le prix de vente d'une pièce est 0,8 milliers d'euros.

1) Si l'entreprise vend *x* pièces, déterminer la recette exprimée en milliers d'euros.
2) Vérifier que le bénéfice mensuel est : $B(x) = 0{,}8x - 1 - 2\ln(x+1)$.
3) Calculer une valeur approchée de B(3) et B(14), puis préciser pour chacun de ces cas si l'entreprise est bénéficiaire.

Exercice n°10 :

On considère la fonction f définie sur $]\,1,+\infty[$ par : $f(x) = \ln(x^3 - x^2)$.

1) Calculer $\lim_{x\to1^+} f(x)$ puis $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
2) a) Calculer f '(x) pour tout x appartenant à $]\,1,+\infty[$.
3) b) Dresser le tableau de variation de f.
4) Montrer que l'équation f (x)=0 admet sur $]\,1,+\infty[$ une unique solution α. Donner la valeur arrondie à 10^{-1} prés de α.
5) Tracer la courbe (C) de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
6) Soit h la fonction définie sur $]\,1,+\infty[$ par : $h(x) = 2x\ln x + (x-1)\ln(x-1)$.
   a) Calculer h '(x).
   b) En déduire une primitive de la fonction f sur $]\,1,+\infty[$.

Application économique :

On considère une machine produisant un liquide chimique, pour quelle soit rentable cette machine doit produire au moins 2 hectolitres.

De plus le liquide produit est dangereux et impose une fabrication maximale de 9 hectolitres avant révision de la machine.

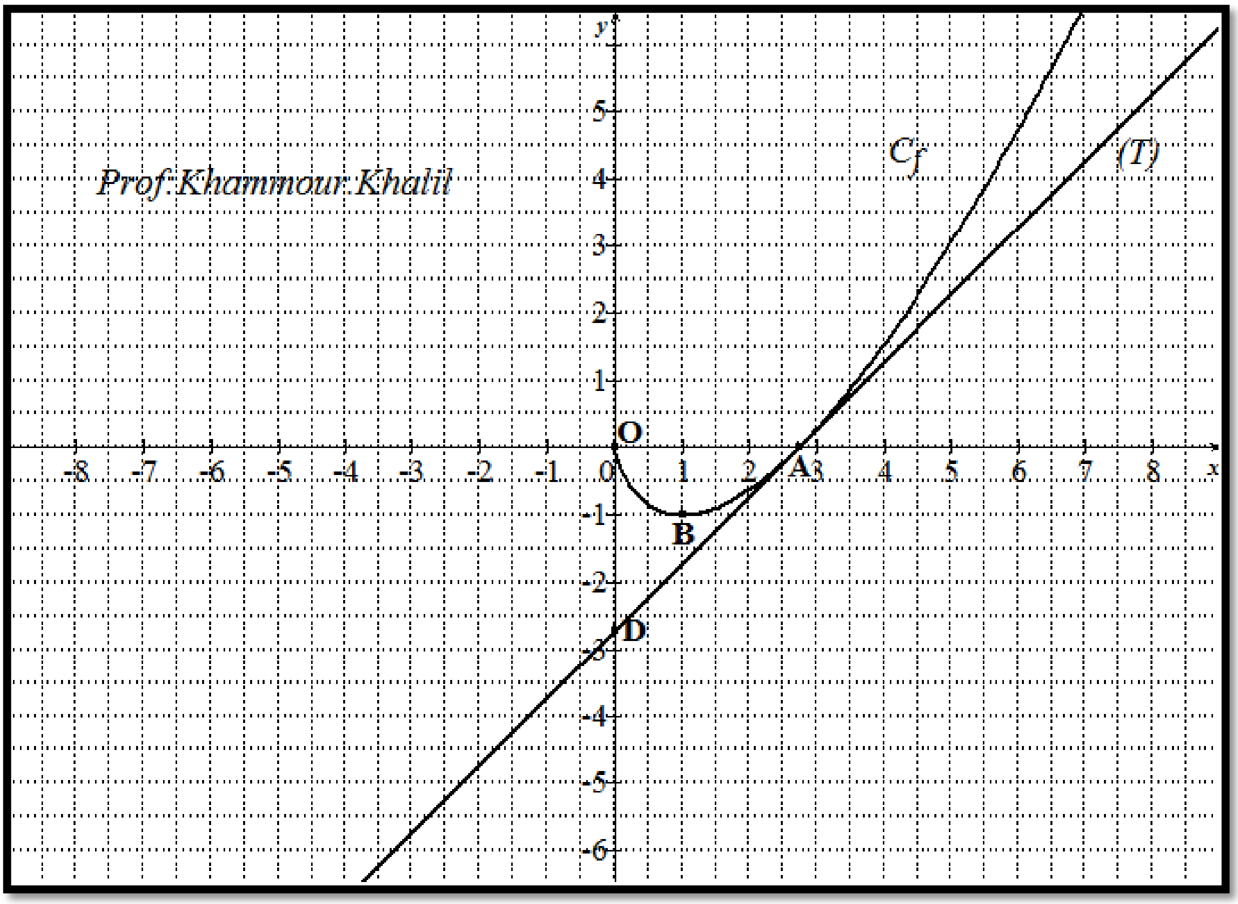
Pour tout x de [2,9] ,la valeur de cout marginal C (x) est exprimé en milliers d'euros est donné par $C(x) = \ln(x^3 - x^2)$ et $C_T(x)$ est le cout totale de fabrication de x hectolitres de liquides. On rappelle que $C'_T(x) = C(x)$.

Le cout total de deux premiers hectolitres (mise en route de la machine et fabrication) est 10 milliers d'euros ce qui se traduit par $C_T(2) = 10$.

1) Déterminer le cout total $C_T(x)$ en fonction de x.
2) Calculer $C_T(9) - C_T(2)$ .On donnera d'abord la valeur exacte de puis un valeur approchés à l'euros prés .Donner une Interprétation graphiquement .

Exercice n°11 :

La courbe (C_f) ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et dérivable sur]0 ; +∞[. On note f′ la fonction dérivée de f.
La courbe (C_f) passe par le points A(e,0) et B(1,-1).



Partie A

La courbe admet une tangente parallèle a l'axe des abscisses au point d'abscisse 1 et une tangente (T) au point d'abscisse e passe par le point D(0,-e).

1) Déterminer une équation de la droite (T).
2) Par lecture graphique déterminer :
   a) f (1) et f '(1).
   b) Dresser le tableau de variation de f sur]0 ; +∞[.
   c) Etudier le signe de f sur]0 ; +∞[.

Partie B

1) Soit f la fonction définie sur]0 ; +∞[par : $f(x) = x(\ln(x) - 1)$.
   a) Déterminer la limite de f en +∞.
   b) Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.
2) a) Calculer f '(x) pour tout x de]0 ; +∞[.
   b) Dresser le tableau de variation de f.
   c)Etudier le signe de f sur]0 ; +∞[.