

Serie d'exercices

Thème : Etude de fonctions

ID=SE450002



Exercice n°1

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^3 - 3x - 1$

1. Etudier les variations de f sur \mathbb{R} .
2. Déterminer une équation de la tangente T_0 à la courbe C_f de f au point d'abscisse 0 et préciser sa position par rapport à C_f .
3. Soit la parabole P d'équation : $y = x^2 - 2x + 1$.
 - a) Préciser les éléments caractéristiques de P .
 - b) Vérifier que le point $A(2 ; 1)$ est un point qui appartient aux deux courbes C_f et P .
 - c) Etudier la position de C_f par rapport à P .
4. Tracer les courbes C_f et P dans un même repère.

Exercice n°2

- Pour chacune des fonctions suivantes
- Expliciter l'ensemble de définition
 - Déterminer le domaine de dérivabilité.
 - Calculer la dérivée.
 - Déterminer le sens de variation de f .

- a. $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = 2x(1 - 3x^2)^3 \end{cases}$
- b. $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow f(x) = \frac{x^2 + 3x - 6}{x - 1} \end{cases}$
- c. $\begin{cases} [-\pi ; \pi] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \sqrt{2 \cos x - 1} \end{cases}$

KKK 'G? A5H<G'H?

Exercice n°3

Partie A

Soit φ la fonction numérique de la variable réelle x telle que : $\varphi(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$.

Déterminer les réels a et b pour que la courbe représentative de φ soit tangente au point I de coordonnées $(0 ; 3)$ à la droite (T) d'équation $y = 4x + 3$.

Partie B

----- © Sigmaths © Sigmaths © Sigmaths © Sigmaths

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x telle que : $f(x) = \frac{3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1}$ et

(C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

1. Montrer que pour tout x réel, on a $f(x) = \alpha + \frac{\beta x}{x^2 + 1}$; α et β étant deux réels

que l'on déterminera.

2. Etudier les variations de f . Préciser ses limites en l'infini et en donner une interprétation graphique. Dresser le tableau de variations de f .

3. Déterminer l'équation de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point I d'abscisse 0. Etudier la position de (C) par rapport à (T).

4. Démontrer que I est centre de symétrie de (C).

5. Construire la courbe (C) et la tangente (T) .

Exercice n°4

On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormé $R=(O; \vec{i}, \vec{j})$ le cercle Γ de centre O et de rayon 1. Soient les points de Γ : A (1 ; 0) et A'(-1 ; 0).

1. Par tout point H du segment [AA'], distinct de A et de A' on mène la perpendiculaire Δ à la droite (AA'). La droite Δ coupe le cercle Γ en M et M'. On pose $\overline{OH} = x$. Calculer l'aire du triangle AMM' .

2. Soit f la fonction définie sur [-1 ; 1] par $f(x) = (1 - x)\sqrt{1 - x^2}$ et (C) sa courbe représentative dans R (unités graphiques 4 cm).

a. Etudier la dérivabilité de f en à droite en -1 et à gauche en 1. Interpréter les résultats obtenus

b. Dresser le tableau de variations de f .

c. Tracer (C).

3. Montrer que le triangle AMM' d'aire maximale est équilatéral.

4. a. Justifier que l'équation $f(x) = 1$ admet exactement deux solutions α et β ($\alpha < \beta$) et donner en le justifiant une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

b. Discuter graphiquement suivant les valeurs de m réel le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

5. On considère la courbe (U) donnée par l'équation $y^2 - (1 - x)^2(1 - x^2) = 0$.

Montrer que (U) est constituée de deux courbes (C) et (C') , (C') étant l'image de (C) par une transformation que l'on précisera.



Correction de la serie SE450002

ID=CS450002



Exercice n°1

1. f est dérivable sur \mathbb{R} et on a : $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+		-		+
$f(x)$	$-\infty$	1	-3	$+\infty$	

2. $T_0 : y = -3x - 1$

$$f(x) - (-3x - 1) = x^3$$

Pour $x \leq 0$, $f(x) - (-3x - 1) \leq 0$ la courbe est au dessous de la tangente

Pour $x \geq 0$, $f(x) - (-3x - 1) \geq 0$ la courbe est au dessus de la tangente

3. Soit la parabole $P : y = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow y - 0 = (x - 1)^2$.

a) P est une parabole de sommet $S(1;0)$, d'axe la droite $D : x = 1$.

b) $2^3 - 3 \times 2 - 1 = 1$ et $2^2 - 2 \times 2 + 1 = 1$

donc le point $A(2;1)$ est un point des deux courbes C_f et P .

c) $f(x) - (x^2 - 2x + 1) = x^3 - 3x - 1 - x^2 + 2x - 1 = x^3 - x^2 - x - 2$

On verifie que 2 est racine du polynôme $x^3 - x^2 - x - 2$.

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - x - 2 &= x^2(x - 2) + 2x^2 - x^2 - x - 2 = x^2(x - 2) + x^2 - x - 2 \\ &= x^2(x - 2) + (x - 2)(x + 1) = (x - 2)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

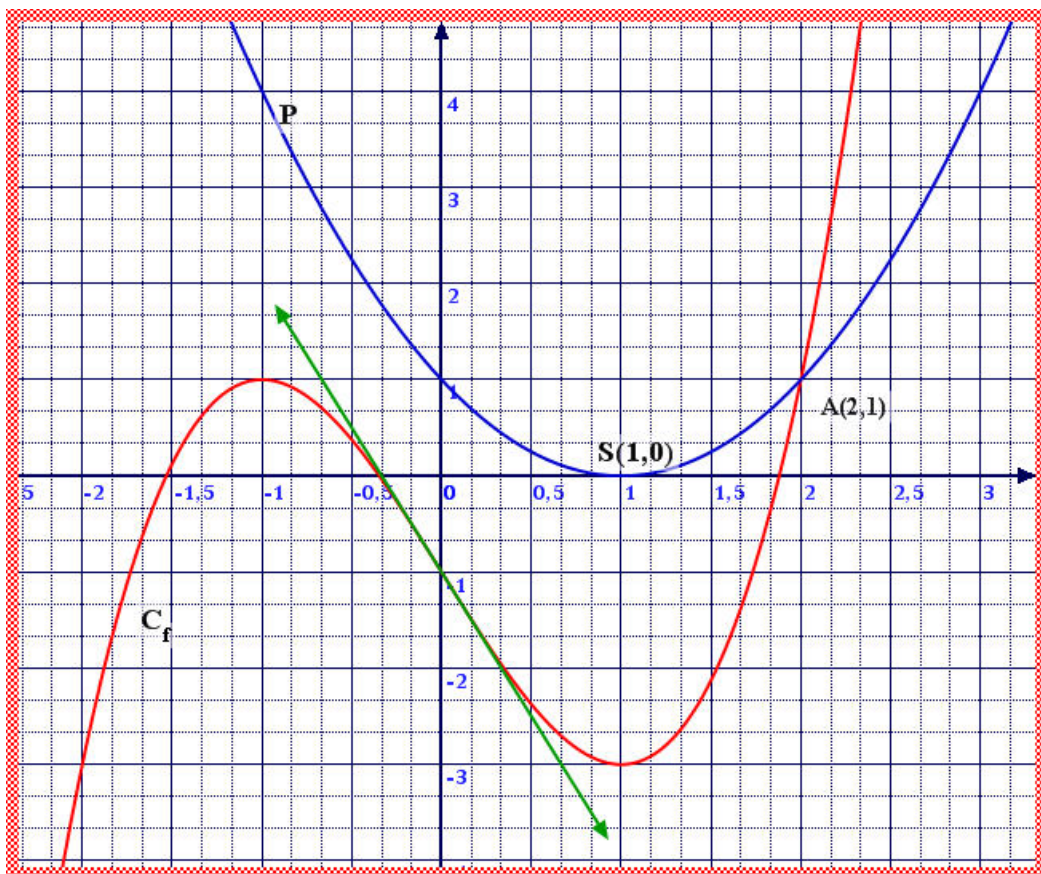
$f(x) - (x^2 - 2x + 1)$ admet le signe de $x - 2$

Pour $x \leq 2$, $f(x) - (x^2 - 2x + 1) \leq 0$ donc la courbe C_f est au dessous de P

Pour $x \geq 2$, $f(x) - (x^2 - 2x + 1) \geq 0$ donc la courbe C_f est au dessus de P

4.

KKK 'G? A5H< G'H?



Exercice n°2

a. $f(x) = 2x(1 - 3x^2)^3$.

f est définie et dérivable sur \mathbb{R} comme fonction polynôme.
 $f'(x)$

$$= 2(1 - 3x^2)^3 + 2x \times 3 \times (-6x) \times (1 - 3x^2)^2$$

$$= 2(1 - 3x^2)^2(1 - 3x^2 - 18x^2)$$

$$= 2(1 - 3x^2)^2(1 - 21x^2)$$

$$= 2(1 - 3x^2)^2(1 - \sqrt{21}x)(1 + \sqrt{21}x)$$

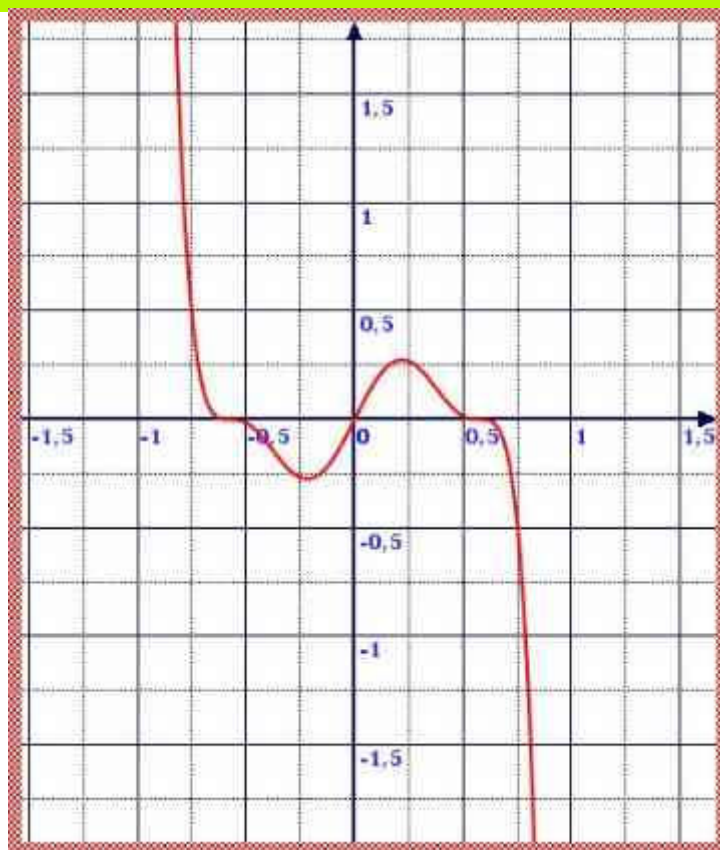
f' est positive sur $\left[-\frac{1}{\sqrt{21}}; \frac{1}{\sqrt{21}}\right]$

donc f est croissante sur

$$\left[-\frac{1}{\sqrt{21}}; \frac{1}{\sqrt{21}}\right].$$

Elle est décroissante sur chacun des intervalles

$$\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{21}}\right] \text{ et } \left[\frac{1}{\sqrt{21}}, +\infty\right[.$$



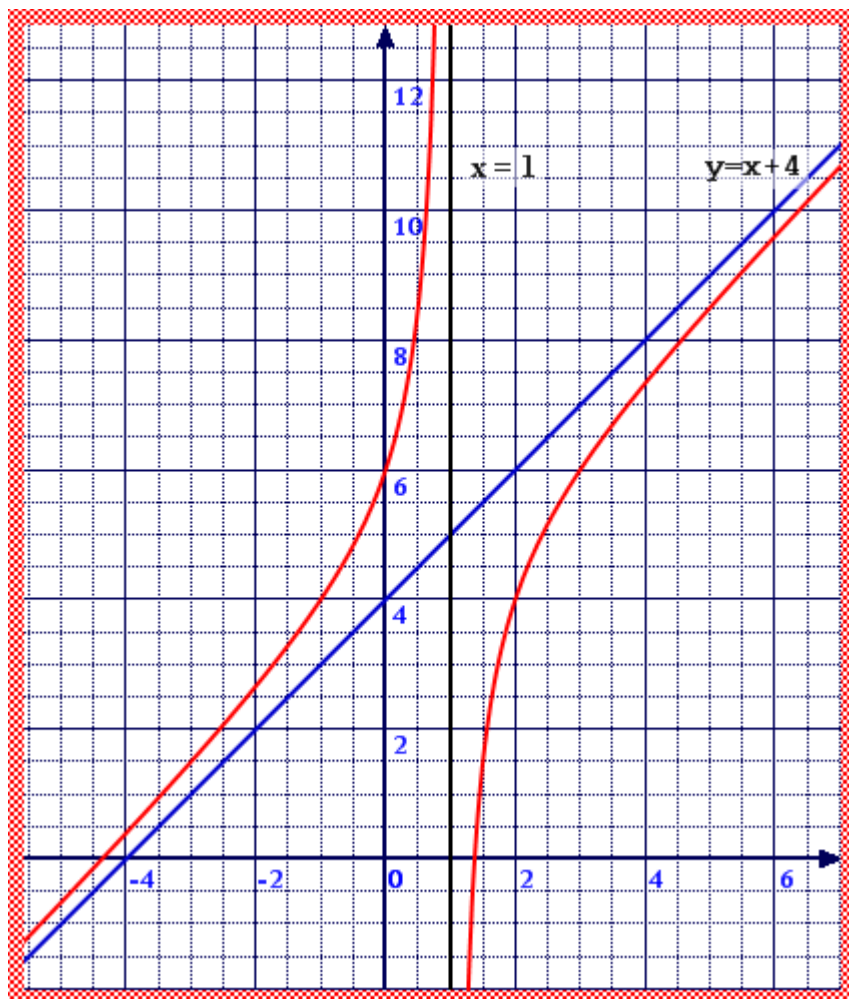
b. $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 6}{x - 1}$. f est une fonction rationnelle définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$f'(x) = \frac{(2x + 3)(x - 1) - (x^2 + 3x - 6) \times 1}{(x - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2x + 3x - 3 - x^2 - 3x + 6}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 3}{(x - 1)^2}$$

Le numérateur est un polynôme du second degré qui ne s'annule jamais (car $\Delta < 0$) et le dénominateur est positif, donc la dérivée est strictement positive et la fonction f strictement croissante sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\begin{aligned} \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - 6}{x^2 - x} \\ &= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) - x &= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{4x - 6}{x - 1} \\ &= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x} = 4 \end{aligned}$$

Donc la droite d'équation $y = x + 4$ est une asymptote à la courbe de f



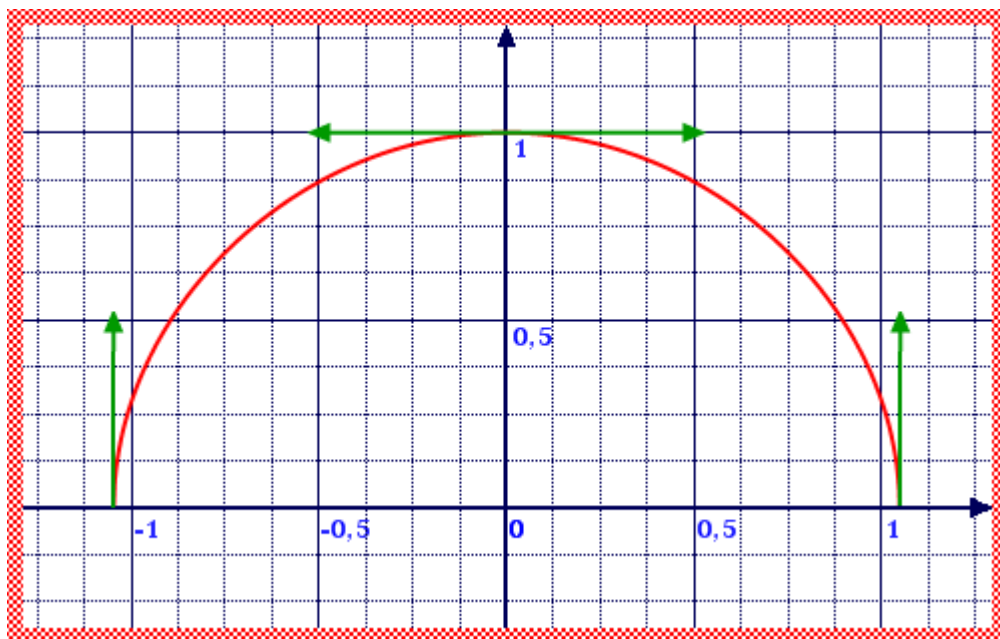
c. $f(x) = \sqrt{2 \cos x - 1}$. Il faut étudier le signe de $2 \cos x - 1$.

$$2 \cos x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2 \cos x \geq 1 \Leftrightarrow \cos x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

f est donc définie sur $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$ dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right[$.

$$f(x) = \sqrt{2 \cos x - 1} = (2 \cos x - 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times (-2 \sin x)(2 \cos x - 1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-\sin x}{\sqrt{2 \cos x - 1}}$$



Pour $x \in \left] -\frac{\pi}{3}, 0 \right]$, la dérivée est positive ($\sin x$ est négatif) donc f est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{3}, 0 \right]$, et pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{3} \right]$, f est décroissante.

Exercice n°3

Partie A

$\varphi(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$ la courbe représentative de φ est tangente à T en I si $\varphi(0) = 3$ et $\varphi'(0) = 4$ (même coefficient directeur que la droite T).

$$\varphi(0) = b = 3 \text{ et } \varphi'(x) = \frac{(6x + a)(x^2 + 1) - 2x(3x^2 + ax + 3)}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow \varphi'(0) = a = 4.$$

Partie B

$$1. f(x) = \alpha + \frac{\beta x}{x^2 + 1} = \frac{\alpha(x^2 + 1) + \beta x}{x^2 + 1} = \frac{\alpha x^2 + \beta x + \alpha}{x^2 + 1} \Rightarrow \alpha = 3, \beta = 4.$$

$$2. f'(x) = \frac{4(x^2 + 1) - 4x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-4(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} \text{ d'où les racines } -1 \text{ et } 1. \text{ Négatif à l'extérieur, positif à l'intérieur.}$$

l'extérieur, positif à l'intérieur.

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x^2 + 1} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x^2} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0 \text{ donc } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 3, \text{ asymptote horizontale } y = 3.$$

3. La tangente a évidemment pour équation $y = 4x + 3$.

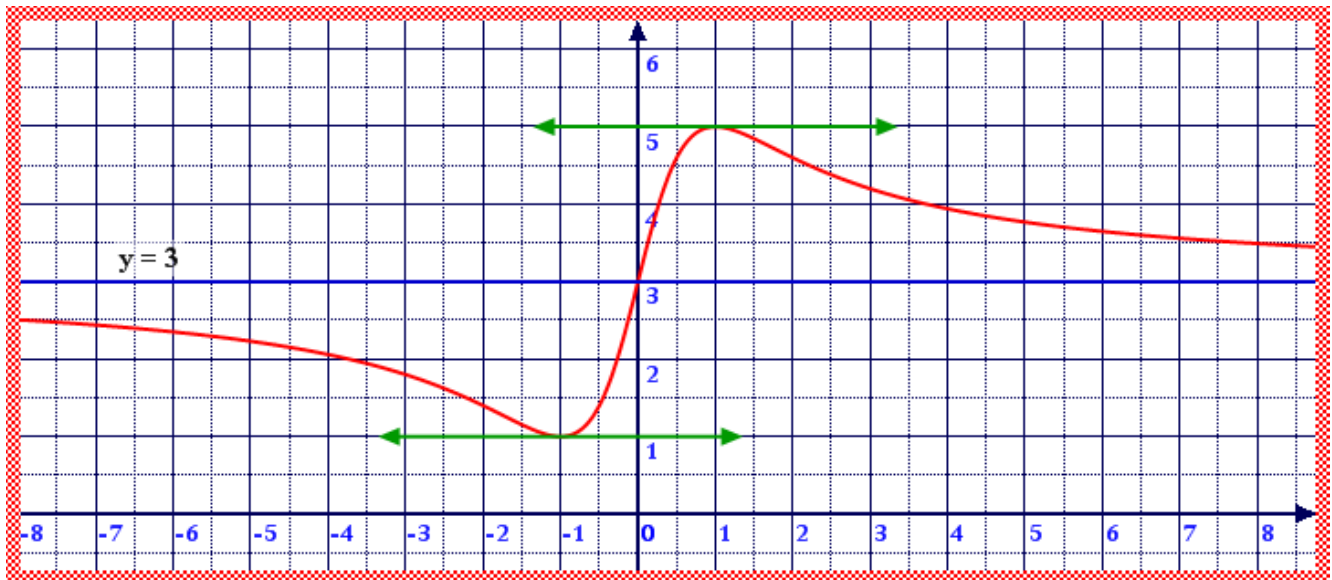
$$\text{Le signe de } f(x) - (4x + 3) = 3 + \frac{4x}{x^2 + 1} - 4x - 3 = \frac{4x - 4x(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{-4x^3}{x^2 + 1}$$

qui admet le signe de $-x$, donc (C) est au dessus de (T) pour $x \leq 0$ et en-dessous pour $x \geq 0$.

4. Pour que le point $\Omega(u, v)$ soit centre de symétrie de (C) il faut que

$$f(2u - x) + f(x) = 2v ; \text{ ce qui donne : } f(x) + f(-x) = 3 + \frac{4x}{x^2 + 1} + 3 - \frac{4x}{x^2 + 1} = 6$$

donc $\Omega(0, 3)$



KKK 'G? A5 H< G'H?