

exercices COMPLEXES - GEOMETRIE

Y. BOULILA

Exercice 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) d'unité graphique 4 cm. On note A et B les points d'affixes respectives 1 et i . à tout point M , distinct de A et d'affixe z , est associé le point M' d'affixe Z définie par :

$$Z = \frac{(1-i)(z-i)}{z-1}.$$

- Calculer l'affixe du point C' associé au point C d'affixe $-i$.
 - Placer les points A, B et C.
- Soit $z = x + iy$ où x et y désignent deux nombres réels.
 - Montrer l'égalité :

$$Z = \frac{(x-1)^2 + (y-1)^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2} - i \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2}.$$

- Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z telle que Z soit réel.
 - Déterminer l'ensemble F des points M d'affixe z telle que $\text{Re}(Z)$ soit négatif ou nul.
- écrire le nombre complexe $(1 - i)$ sous forme trigonométrique.
 - Soit M un point d'affixe z , distinct de A et de B. Montrer que :
$$\frac{(1-i)(z-i)}{z-1} \in \mathbb{R}^* \text{ si et seulement s'il existe un entier } k \text{ tel que}$$
$$\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \right) = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$
 - En déduire l'ensemble des points M vérifiant $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \right) = \frac{\pi}{4} + k\pi$.
 - Déterminer l'ensemble des points M vérifiant $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$.

Exercice 2

Dans le plan complexe \mathcal{P} muni d'un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère le quadrilatère ABCD tel que :

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \alpha \quad [2\pi], \quad \left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}\right) = \beta \quad [2\pi], \quad 0 < \alpha < \pi, \quad 0 < \beta < \pi.$$

On construit les triangles équilatéraux DCP, DAQ, BAM et BCN tels que :

$$\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DP}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi], \quad \left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DQ}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BN}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$$

Soit a, b, c et d les affixes respectives des points A, B, C et D, m, n, p et q les affixes respectives des points M, N, P et Q.

1. Démontrer les relations suivantes :

$$m = e^{i\frac{\pi}{3}}(a - b) + b, \quad n = e^{i\frac{\pi}{3}}(c - b) + b,$$

$$p = e^{i\frac{\pi}{3}}(c - d) + d, \quad q = e^{i\frac{\pi}{3}}(a - d) + d.$$

2. En utilisant les relations précédentes :

a. Démontrer que MNPQ est un parallélogramme.

b. Démontrer que l'on a :

$$\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{QP}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi], \quad AC = QP$$

$$\left(\overrightarrow{NP}, \overrightarrow{BD}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi], \quad \text{et} \quad NP = BD.$$

3. Démontrer que MNPQ est un carré si, et seulement si, les diagonales [AC] et [BD] du quadrilatère ABCD vérifient :

$$AC = BD \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right) = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

où k est un entier relatif.