

Exercices de probabilité

Exercice n°1

Un récipient contient un gaz constitué de deux sortes de particules : 75 % de particules A et 25 % de particules B. Les particules sont projetées sur une cible formée de deux compartiments K1 et K2. L'expérience est modélisée de la manière suivante :

- Une particule au hasard parmi les particules de type A entre dans

K1 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et dans K2 avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

- Une particule au hasard parmi les particules de type B entre dans chacun des compartiments avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

Partie A

1. Soit une particule au hasard. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A1 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K1 » ;

A2 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K2 » ;

B1 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K1 » ;

B2 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K2 » ;

C1 : « la particule entre dans K1 » ;

C2 : « la particule entre dans K2 ».

2. On procède 5 fois de suite et de façon indépendante à l'épreuve décrite en introduction. Le nombre de particules étant très grand, on admettra que les proportions 75 % et 25 % restent constantes. Calculer la probabilité de l'événement E suivant : « il y a exactement deux particules dans K2 ».

Partie B

Un récipient contient le gaz décrit précédemment. Les particules A sont radioactives et se transforment spontanément en particules B.

On note $p(t)$ la proportion de particules A dans le gaz. Ainsi, à l'instant $t=0$, on a $p(0)=0,75$.

Plus généralement, si t est exprimé en années, on a $p(t)=0,75e^{-\lambda t}$

où λ est une constante réelle. La demi-vie¹ des particules de type A est égale à 5730 ans.

1. Calculer λ ; on prendra une valeur approchée à 10^{-5} près par défaut.

2. Au bout de combien d'années, 10 % des particules de type A se seront-elles transformées en particules de type B ?

3. Déterminer la valeur de t pour laquelle il y aura autant de particules de type A que de particules de type B (on arrondira à l'unité).

Exercice n°2

Un joueur dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et de trois urnes, U_1 , U_2 et U_3 contenant chacune k boules, où k désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Il y a trois boules noires dans U_1 , deux boules noires dans U_2 et une boule noire dans U_3 . Toutes les autres boules dans les urnes sont blanches. Les boules sont indiscernables au toucher.

Une partie se déroule de la manière suivante :

le joueur lance le dé,

* s'il obtient le numéro 1, il prend au hasard une boule dans l'urne U_1 , note sa couleur et la remet dans U_1 ;

* s'il obtient un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans U_2 , note sa couleur et la remet dans U_2 ;

* si le numéro amené par le dé n'est ni 1 ni un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans U_3 , note sa couleur et la remet dans U_3 .

On désigne par A, B, C et N les événements suivants :

A : « Le dé amène le numéro 1 ».

B : « Le dé amène un multiple de 3 ».

C : « Le dé amène un numéro qui n'est ni 1 ni un multiple de 3 ».

N : « La boule tirée est noire ».

1. Le joueur joue une partie.

¹ Temps au bout duquel le nombre de particules restantes est la moitié du nombre initial.

a. Montrer que $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$.

b. En déduire d_m ; on donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale à la semaine près.

Exercice n°5

Le bus passe toutes les quinze minutes à un arrêt précis. Un usager se présente à cet arrêt entre 7 heures et 7 heures 30. La variable aléatoire sera l'heure exacte de son arrivée à cet arrêt, uniformément répartie sur l'intervalle [0 ; 30].

1. Quelle est la probabilité que l'usager attende moins de 5 minutes le prochain bus ?
2. Quelle est la probabilité qu'il attende plus de dix minutes ?

Indications de solutions

Exercice n°1

1. $p(A1) = p(A \cap K1) = \frac{1}{4}$; $p(A2) = p(A \cap K2) = \frac{1}{2}$; $p(B1) = p(B \cap K1) = \frac{1}{8}$

$p(B2) = p(B \cap K2) = p_B(K2) p(B) = \frac{1}{2} \cdot 0,25 = \frac{1}{8}$; $p(C1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$;

$p(C2) = p((A \cap K2) \cup (B \cap K2)) = p(A \cap K2) + p(B \cap K2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$.

2. Loi binomiale, $B(5, 5/8)$; $p(2 \text{ dans } K2) \approx 0,206$.

Exercice n°2

Partie A

1.a. $p(N) = p[(A \cap N) \cup (B \cap N) \cup (C \cap N)]$

b. $p(\text{dé}=1/N) = \frac{p(A \cap N)}{p(N)} = \frac{1/2k}{5/3k} = \frac{3}{10}$.

c. $\frac{5}{3k} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3k < 10 \Leftrightarrow k < \frac{10}{3}$; comme $k \geq 3$, il reste $k = 3$.

d. $\frac{5}{3k} = \frac{1}{30} \Leftrightarrow 3k = 150 \Leftrightarrow k = 50$.

2. Loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{1}{30}$.

$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \left(\frac{29}{30}\right)^{20} \approx 0,492$

Partie B

$p(t) = 0,75 e^{-\lambda t}$ où λ est une constante réelle. La demi-vie des particules de type A est égale à 5730 ans.

1. $\lambda = \frac{\ln 2}{5730} \approx 0,00012097$, soit 0,00012 à 10^{-5} près par défaut.

2. On cherche t pour qu'il reste 90 % des particules de type A, soit

$p(t) = \frac{90}{100} p(0)$, ce qui donne : $0,75 e^{-\lambda t} = 0,9 \times 0,75$.

$t = \frac{\ln(0,9)}{-\lambda} = \frac{\ln(0,9)}{-0,00012} \approx 871$ ans

3. Il y aura autant de particules de type A que de particules de type B lorsque les pourcentages de types A et B seront de 50 % chacun. En l'occurrence il faut que $p(t) = 0,5$, ce qui donne

$0,75 e^{-\lambda t} = 0,5 \Leftrightarrow e^{-\lambda t} = \frac{0,5}{0,75} \Leftrightarrow -\lambda t = \ln(2/3) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(2/3)}{-\lambda} \approx 3352$ ans.

Exercice n°3

2. a. $p(A) = \frac{n}{n+3} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{n+3} \times \frac{1}{2}$, soit $p(A) = \frac{3}{4} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)$.

b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(A) = \frac{3}{4}$. 3. $p(B) = \frac{3}{n+3} \times \frac{1}{2}$, $p(B) = \frac{3}{2(n+3)}$.

4. a. Le joueur doit être certain de pouvoir, dans le meilleur des cas, récupérer au moins sa mise d'où $2n > 20$, soit $n > 10$.

Loi de probabilité de la variable aléatoire X :

x_i	$2n - 20$	$n - 20$	-20
$p(X = x_i)$	$\frac{3}{2(n+3)}$	$\frac{3}{4} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)$	$\frac{n}{4(n+3)}$

c. Espérance mathématique :

$E(x) = E(X) = \frac{(2n-20) \times 3}{2(n+3)} + (n-20) \frac{3}{4} \left(\frac{n+2}{n+3}\right) - \frac{20n}{4(n+3)}$,

Sigmaths © Sigmaths © Sigmaths

$$\text{Soit } E(X) = \frac{3n^2 - 62n - 240}{4(n+3)}$$

d. $E(X) > 0$ donne $3n^2 - 62n - 240 > 0$, soit $(3n + 10)(n - 24) > 0$ et $n \in [25; +\infty[$ puisque n est entier.

Exercice n°4

$$1. P([0; 200]) = \int_0^{200} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-200\lambda} + 1 = 0,5 \text{ ce qui donne } \lambda = \frac{\ln 2}{200}.$$

$$2. P([300; +\infty[) = 1 - \int_0^{300} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\frac{3}{2} \ln 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0,35$$

4. $Ae^{-\lambda A}$ tend vers 0 lorsque A tend vers $+\infty$. La limite d_m est alors $\frac{1}{\lambda}$

$$d_m = \frac{200}{\ln 2} \approx 289 \text{ semaines.}$$

Exercice n°5

La variable aléatoire est le temps uniformément réparti sur 30 minutes donc $f(x) = 1/30$.

1. L'attente n'est inférieure à cinq minutes que s'il arrive entre 7 h 10 et 7 h 15 ou entre 7 h 25 et 7 h 30. On a donc

$$P(10 \leq X \leq 15) = P(25 \leq X \leq 30) = \int_{25}^{30} \frac{1}{30} dx = \frac{1}{6}, \text{ soit la probabilité}$$

cherchée égale à $2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

2. De même on a $P(0 \leq X \leq 5) + P(15 \leq X \leq 20) = \frac{1}{3}$.