

Exercice 1 ☺

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$

1) a) Le plan étant muni d'un repère orthonormé, interprétez graphiquement I_0 et donnez sa valeur exacte.

b) Calculer I_1 .

2) En utilisant une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

$$\text{on a : } I_n = \frac{n-1}{n+2} I_{n-2}.$$

Solution ☺

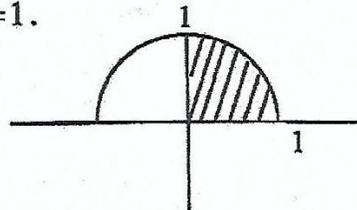
$$I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \quad \text{on a : } \sqrt{1-x^2} \geq 0$$

Alors I_0 c'est l'aire du domaine \mathcal{D} du plan limité par : $\mathcal{C} : y = \sqrt{1-x^2}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

$$y = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1-x^2 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

donc \mathcal{C} est la demi-cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

I_0 est l'aire du domaine hachurée d'où $I_0 = \frac{\pi}{4}$



$$I_1 = \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 -2x \sqrt{1-x^2}$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$2) I_n = \int_0^1 x^{n-1} x \sqrt{1-x^2} dx$$

$$\text{Posons } \begin{cases} U(x) = x^{n-1} \\ V'(x) = x \sqrt{1-x^2} \end{cases} \quad \text{alors } \begin{cases} U'(x) = (n-1)x^{n-2} \\ V(x) = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

$$I_n = \left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} x^{n-1} \right]_0^1 + \frac{n-1}{3} \int_0^1 x^{n-2} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= \frac{n-1}{3} \int_0^1 x^{n-2} (1-x^2) \sqrt{1-x^2} dx$$

$$= \frac{n-1}{3} \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1-x^2} dx + \frac{n-1}{3} \int_0^1 -x^n \sqrt{1-x^2} dx$$

$$I_n = \frac{n-1}{3} \cdot I_{n-2} - \frac{n-1}{3} I_n$$

$$\left(1 + \frac{n-1}{3}\right) I_n = \frac{n-1}{3} I_{n-2} \quad \text{d'où } I_n = \frac{n-1}{n+2} I_{n-2}$$

Exercice 2 ☺

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0, \pi[$ par : $f(x) = \text{Log}\left(\text{tg} \frac{x}{2}\right)$

1°/ Exprimer $f'(x)$ en fonction de $\text{tg} \frac{x}{2}$ puis étudier les variations de f

2°/ Montrer que f possède une réciproque g dont on précisera le domaine de définition

3°/ Soient \mathcal{C} et \mathcal{C}' les représentations graphiques respectives de f et g dans un même repère orthonormal

(O, \vec{i}, \vec{j}) du plan

a/ Montrer que le point $I\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ est un centre de symétrie de la courbe \mathcal{C}

b/ Montrer que le point $I'\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ est un centre de symétrie de la courbe \mathcal{C}'

c/ Tracer \mathcal{C} et \mathcal{C}' ainsi que leurs tangentes en I et I'

4°/ a/ Montrer que la fonction g est dérivable et calculer $g'(x)$ en fonction de x

b/ Calculer la valeur de l'intégrale : $A = \int_0^{\text{Log} \sqrt{3}} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

5°/ Soit la fonction G définie sur \mathbb{R} par : $G(x) = \int_1^{e^x} \frac{dt}{1+t^2}$

a/ Montrer que G est dérivable sur \mathbb{R} et calculer $G'(x)$ en fonction de x

b/ Montrer que $G(x) = \alpha g(x) + \beta$ où α et β sont deux constantes que l'on précisera

c/ Calculer les intégrales : $B = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2}$ et $C = \int_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dt}{1+t^2}$

Solution ☺

1°/ $f(x) = \text{Log}\left(\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$. f est dérivable sur $]0, \pi[$ et on a : $f'(x) = \frac{\left(\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)'}{\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}$

$$f'(x) = \frac{1 + \text{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}. \text{ Or : } x \in]0, \pi[\Rightarrow \frac{x}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow \text{tg}\frac{x}{2} > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$$

x	0	π
$f'(x)$		
f(x)	$-\infty$	$+\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \text{Log}\left(\text{tg}\frac{x}{2}\right) = -\infty$ (car : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \text{tg}\frac{x}{2} = 0^+$) Donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à \mathcal{C}

$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \text{Log}\left(\text{tg}\frac{x}{2}\right) = +\infty$ (car : $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \text{tg}\frac{x}{2} = +\infty$) Donc la droite d'équation $x = \pi$ est asymptote à \mathcal{C}

2°/ f est continue et strictement croissante. Elle réalise une bijection de $]0, \pi[$ sur $f(]0, \pi[) = \mathbb{R}$. Elle possède une réciproque g qui est définie sur \mathbb{R} .

$$3^\circ/ a/x \in D_f \Leftrightarrow 0 < x < \pi \Leftrightarrow -\pi < -x < 0$$

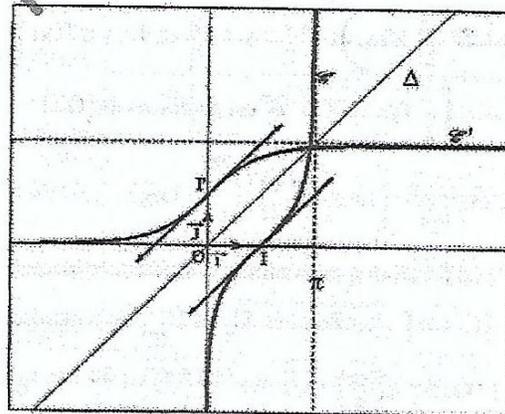
$$\Leftrightarrow 0 < \pi - x < \pi \Leftrightarrow \pi - x \in D_f$$

$$f(\pi - x) = \text{Log}\left(\text{tg}\left(\frac{\pi - x}{2}\right)\right) = \text{Log}\left(\text{cotg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$f(\pi - x) = \text{Log}\frac{1}{\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)} = -\text{Log}\left(\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = -f(x)$$

Donc $I\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ est un centre de symétrie de la courbe \mathcal{C} .

b/ $\mathcal{C}' = S_{\Delta}(\mathcal{C})$ et $\Gamma = S_{\Delta}(I)$ comme I est un centre de symétrie de \mathcal{C} alors $I\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ est centre de symétrie de \mathcal{C}'



4°/ a/ La fonction f est une bijection dérivable et sa dérivée $f'(x)$ ne s'annule pas sur $]0, \pi[$ donc sa réciproque g est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x on a : $g'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)}$ où $y = f^{-1}(x)$ d'où :

$$g'(x) = \frac{2\text{tg}\left(\frac{y}{2}\right)}{1 + \text{tg}^2\left(\frac{y}{2}\right)}. \text{ D'autre part : } y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y) \Leftrightarrow x = \text{Log}\text{tg}\left(\frac{y}{2}\right) \Leftrightarrow e^x = \text{tg}\left(\frac{y}{2}\right)$$

Par suite : $g'(x) = \frac{2e^x}{1+e^{2x}} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$

b/A = $\int_0^{\text{Log}\sqrt{3}} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{2} \int_0^{\text{Log}\sqrt{3}} g'(x) dx = \frac{1}{2} (g(\text{Log}\sqrt{3}) - g(0))$

$g(\text{Log}\sqrt{3}) = x \Leftrightarrow f(x) = \text{Log}\sqrt{3} \Leftrightarrow \text{Log}\left(\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \text{Log}\sqrt{3} \Leftrightarrow \text{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi ; \text{ or } x \in]0, \pi[\text{ d'où : } x = \frac{2\pi}{3} \text{ donc : } g(\text{Log}\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$

on a : $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(0) = \frac{\pi}{2} \text{ donc : } g(0) = \frac{\pi}{2} \text{ et par suite : } A = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{12}$

5°/ a/ On pose $u(x) = e^x$ et soit H une primitive sur \mathbb{R} de la fonction h définie par : $h(t) = \frac{1}{1+t^2}$. On aura alors

$G(x) = \int_1^{u(x)} \frac{dt}{1+t^2} = [H(t)]_1^{u(x)} = H(u(x)) - H(1)$. Les deux fonctions U et H sont dérivables sur \mathbb{R} donc G est

dérivable sur \mathbb{R} et on a : $\forall x \in \mathbb{R}, G'(x) = (e^x)' h(e^x) = \frac{e^x}{1+(e^x)^2} = \frac{e^x}{1+e^{2x}} = \frac{1}{e^{-x} + e^x}$

b/ $\forall x \in \mathbb{R}, G'(x) = \frac{1}{2} g'(x) \Rightarrow G(x) = \frac{1}{2} g(x) + \beta$. Or $G(0) = \int_1^{e^0} \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^1 \frac{dt}{1+t^2} = 0$ d'où : $\frac{1}{2} g(0) + \beta = 0$

Donc : $\frac{\pi}{4} + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{G(x) = \frac{1}{2} g(x) - \frac{\pi}{4}}$

c/B = $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{e^{\text{Log}\sqrt{3}}} \frac{dt}{1+t^2} = G(\text{Log}\sqrt{3}) = \frac{1}{2} g(\text{Log}\sqrt{3}) - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$

C = $\int_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{e^{\text{Log}\frac{1}{\sqrt{3}}}} \frac{dt}{1+t^2} = G\left(\text{Log}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2} g\left(-\text{Log}\sqrt{3}\right) - \frac{\pi}{4}$, or $I'\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ est un centre de symétrie de la

courbe \mathcal{S}' donc : $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $g(-x) = \pi - g(x)$ d'où : $g(-\text{Log}\sqrt{3}) = \pi - g(\text{Log}\sqrt{3}) = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

On en déduit que : $C = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{12}$

Queslati Aymen 2018

Oueslati Aymen Tél 21677722