

Exercice n°1 :

I. Donner la réponse exacte.

1) Soit la suite U définie par son premier terme U_0 et $U_{n+1} = 2U_n + 3$.

a) U est une suite géométrique.

b) La suite V définie par $V_n = U_n + 3$ est une suite géométrique.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2^n (U_0 + 3) - 3$.

2) On considère les suites U , V et W telles que pour tout n , on a : $U_n \leq V_n \leq W_n$. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$ alors :

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = +\infty$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$

c) (W_n) n' a pas de limite.

3) Soit la suite U définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^* U_n = (-1)^n$ est :

a) Bornée

b) convergente

c) croissante.

4) Soit la suite U définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^* U_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$

5) Soit la suite U définie par : $\forall n \in \mathbb{N} U_n = \frac{\sin n}{n^2 + 1}$ alors on a :

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

II. Répondre par vrai ou faux en justifiant :

1) U converge ssi U^2 converge.

2) Si U est bornée alors U converge.

3) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{U_n}{V_n}\right) = 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \ell$.

4) Deux suites qui convergent vers une même limite sont adjacentes.

5) Si $U_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k$ alors U converge vers 1.

6) La suite $W_n = \frac{1}{n} + \sin(n)$ est convergente.

7) La suite T définie pour tout $n > 0$ $T_n = \frac{2n + (-1)^n}{n}$ converge vers 2.

Exercice n°2 :

Soit (U_n) la suite numérique définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{3U_n + 4} \end{cases}$$

1) a) Montrer que $U_n \in [0, 4]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que (U_n) est convergente. Déterminer sa limite.

2) a) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}$, $4 - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - U_n)$

b) Retrouver la limite de (U_n) .

Exercice n°3 :

Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ et $U_{n+1} = U_n(1 - U_n)$.

- 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad U_n \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$.
- 2) Montrer que (U_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice n°4 :

Soit α un réel tel que $\alpha \in [0,1]$. Soit U la suite définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{3 + (1 - \alpha^2)U_n^2} \end{cases}$$

- 1) On suppose dans cette question $\alpha = 0$.
 - a) Calculer U_1, U_2 et U_3 .
 - b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n = \sqrt{3n}$.
- 2) On suppose dans cette question $\alpha \neq 0$.
 - a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq \frac{\sqrt{3}}{\alpha}$.
 - b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \leq U_{n+1}$. Déduire que la suite U est convergente..
- 3) Soit (V_n) la suite réelle définie sur \mathbb{N} par : $V_n = U_n^2 - \frac{3}{\alpha^2}$.
 - a) Montrer que la suite V est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n et α .
 - c) On pose $S_n = \sum_{k=0}^n U_k^2$. Calculer S_n en fonction de n et α .

Exercice n°5 :

Soit α un réel appartenant à $]0,1[$. On considère la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{(1 + \alpha)U_n - \alpha}{U_n} \end{cases}$$

- 1) a) Montrer que pour tout n de \mathbb{N} , on a : $U_n \geq 1$.
 - b) Montrer que (U_n) est une suite décroissante.
 - c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et trouver sa limite.
- 2) Soit (V_n) la suite définie sur \mathbb{N} par : $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n - \alpha}$.
 - a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera son premier terme et sa raison.
 - b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.
 - c) Retrouver alors la limite de la suite (U_n) .

Exercice n°6 :

Soit U la suite définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} U_0 = a \\ 1 + U_{n+1} = \frac{1 + U_n}{\sqrt{1 + U_n^2}} \end{cases}$$

- 1) Pour quelles valeurs de a la suite U est constante.
- 2) On suppose dans la suite de l'exercice que $a = -\frac{1}{2}$
 - a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 < U_n < 0$.
 - b) Montrer que la suite U est décroissante et convergente.
- 3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < 1 + U_{n+1} \leq \frac{2}{\sqrt{5}}(1 + U_n)$.
 - b) Dédire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $0 < 1 + U_{n+1} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^n$.
 - c) Dédire la limite de la suite U .
- 4) Soit $V_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n U_k$. Trouver un encadrement de la suite V_n puis déterminer sa limite.

Exercice n°7 :

On considère la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{3}{\sqrt{6 - U_n^2}} \end{cases}$$

- 1) Calculer U_1 et U_2 .
- 2) a) Montrer que pour tout n de \mathbb{N} , on a : $0 \leq U_n < \sqrt{3}$.
 - b) Montrer que (U_n) est une suite croissante.
 - c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et trouver sa limite.
- 3) Soit (V_n) la suite définie sur \mathbb{N} par : $V_n = \frac{U_n^2}{3 - U_n^2}$.
 - a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique dont on déterminera son premier terme et sa raison.
 - b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n .
 - c) Retrouver alors la limite de la suite (U_n) .

Exercice n°8 :

Soit la suite U définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 2 + \frac{1}{U_n^2} \end{cases}$$

- 1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n \geq 1$ et que U_n est croissante.
 - b) Justifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$.
- 2) Soit V la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$ $V_n = 2 + \frac{1}{U_n^2}$.
 - a) Etudier la monotonie de V .
 - b) Dédire que V est convergente.
- 3) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n \geq 1 + 2n$.

b) Retrouver alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$.

4) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 2 \leq V_n \leq 2 + \frac{1}{n(n+1)}$.

b) Soit $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n V_k$. Montrer que S est convergente. (Remarquant que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$).

Exercice n°9 :

On définit deux suites (U_n) et (V_n) par : $U_1 = 12, V_1 = 1, U_{n+1} = \frac{U_n + 2V_n}{3}, V_{n+1} = \frac{U_n + 3V_n}{4}$

- 1) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $W_n = U_n - V_n$. Montrer que (W_n) est une suite géométrique à termes positifs, déterminer sa limite et exprimer W_n en fonction de n.
- 2) Démontrer que la suite (U_n) est décroissante et que la suite (V_n) est croissante.
- 3) Pour tout entier $n \geq 1$, démontrer que $U_n \geq V_n$. En déduire que $U_1 \geq U_n \geq V_n \geq V_1$.
- 4) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $T_n = 3U_n + 8V_n$. Démontrer que (T_n) est une suite constante.
- 5) En déduire les expressions de U_n et V_n en fonction de n, puis les limites de (U_n) et (V_n) .

Exercice n°10 :

On considère la suite U définie par :
$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) U_{n-1} \end{cases} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*.$$

- 1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^* \quad U_n > 0$.
b) Exprimer U_n en fonction de n.
- 2) On pose : pour tout n de \mathbb{N} , $V_n = \sqrt{n}U_n$ et $W_n = \sqrt{n+1}U_n$
 - a) Montrer que la suite V est croissante et la suite W est décroissante.
 - b) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^* \quad \frac{1}{4\sqrt{n}} \leq U_n \leq \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$.
 - c) Montrer que la suite U est convergente et calculer sa limite.
 - d) Montrer que les suites U et W sont adjacentes.